

Title	微分法ニ就イテ, II
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 61 p.22-p.30
Issue Date	1935-10-11
oaire:version	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/74149">https://doi.org/10.18910/74149</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

## 227. 微分法ニ就イテ, II

南 雲 道 夫 (阪大)

前号、論文 221 = 於ケル内容カラ、己ニ私ノ目的が如何ナルモノカハ大体御ワカリノコト、思フ。筆者ノ目的ハ實函数論的ナ方面（正則性ノ假定ヲ減ズルコトニヨリ一般的ナ結果ヲ目指スモノ）デハナクテ、ムシロ正則性ヲ保チナカラ微分法ノ適用範圍ヲ拡大スルニアル。即チ有限次元ノ函数、ミナラズ函数空間ノ如キモノニモ共通スル微分法ヲ論ズルコトが主眼デアル。ソノタメニ筆者ハ線狀函数ヲ基礎トシ、無限小ナ部分ヲバ線狀函数ト見做スコトヲ微分法デアルト考ヘル。從ツテ微分法ノ對象が線狀空間内ニカギラレタノデアル。

以上が私ノ考ヘノ全部デアル。本質的ニハ別ニ新ラシイモノデハナイ、只アマリニ文献ニ暗イノデ、未ダカムルコトが表面カラ取扱ハレテアルコトヲ知ラナイ、切ニ識者ノ御教示ヲ仰グ所以デアル。

### §2. 獨立變數が實數ノ場合

此ノ論文デハ、獨立變數モ從屬變數モ一級ノ線狀空間ノ要素デアルモノヲ主眼トスルノデアルガ、特ニ獨立變數が實數ノ場合ヲ考ヘルコトハ補助トシテ必要デアル。

尤モ實數ノ時ニハ、

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

デ、 $\frac{dy}{dt}$  ハ  $y$  ト同シ線状空間  $\mathcal{L}$  = 属スル。此ノ場合 = ハ  
スバテ普通ノ微分法ト同様ニ考ヘラレル。

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = 0 = \text{就テ}} \quad \text{一般} = \frac{dy}{dy} = 0 \quad \text{ナルトキ } y \text{ ノ領}$$

域ガ連結ナレバ  $y = \text{一定ナルコトヲ}$ 、スデ = 前号デ証明シ  
タ、併シ前号デハ “一般ノ線状空間  $\mathcal{L}$  = 含マレタ二次元ノ  
線状空間デ定義サレタル線状函数 (実数值) ハ、 $\mathcal{L}$  全体デ  
連続ナ線状函数 = 拡張出来ル” トイフ定理ヲ用ヒタ、シカシ  
ソノ定理ノ証明ハ超限的論法 = ヨルノデアアル。

$\frac{dy}{dy} = 0$  ナル問題ハ  $y = y(t)$  [ $t$  ハ實変数] トオクコト  
= ヨリ容易 =、 $\frac{dy}{dt} = 0$  ナル形式ノ問題 = 改メラレル。此

ノ場合 = ツイテ  $y = \text{一定ナルコト}$  ハ直接 = 証明出来ル。ソ  
ノ考ヘハ 寺阪君 ガ暗示サレタモノデアアル。

$|y(t_2) - y(t_1)|$  ヲバ區間  $[t_1, t_2]$  = 於ケル  $y(t)$   
ノ変化ト名付ケル。問題ハ區間  $[0, 1]$  = 於ケル  $y(t)$  ノ変  
化  $|y(1) - y(0)|$  ガ零ナルコトヲ証明スレバヨイ。 $[0, 1]$   
ヲ二等分シ、 $[0, \frac{1}{2}]$  ト  $[\frac{1}{2}, 1]$  ノ内デ  $y(t)$  ノ変化ノ大  
ナル (小ナラザル) 方ノ區間ヲ  $I_1$  ト名付ケ、 $I_1$  = 於ケル  $y(t)$   
ノ変化ヲ  $v(I_1)$  デ示セバ、

$$|y(1) - y(0)| \leq 2v(I_1).$$

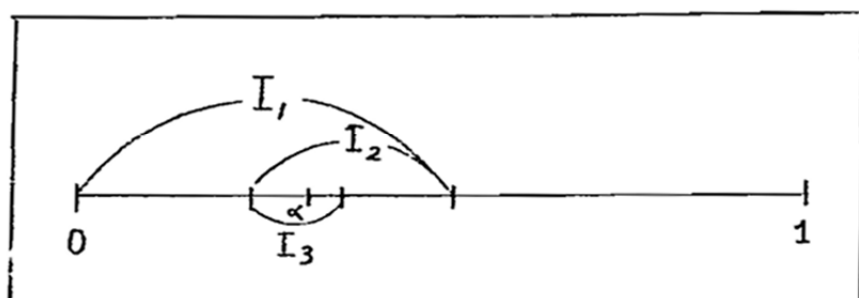
次 =  $I_1$ ,  $\gamma$  更 = ニツノ 區間 = 等分シ、ソノ 内デ  $\gamma(t)$  ノ 変化ノ 大ナル (小ナラザル) カヲ  $I_2$  トスレバ、

$$|\gamma(1) - \gamma(0)| \leq 4 \nu(I_2).$$

以下同様ニシテ

$$|\gamma(1) - \gamma(0)| \leq 2^n \nu(I_n),$$

$$[0, 1] \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots.$$



スベテノ  $I_n$  = 共通ナ一点ヲ  $\alpha$  トスル、

$$\left( \frac{d\gamma}{dt} \right)_\alpha = 0$$

ナルニヨリ、

$\alpha - \delta(\varepsilon) < t_1 \leq \alpha \leq t_2 < \alpha + \delta(\varepsilon)$  トスレバ、

$$|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)| \leq \varepsilon(t_2 - t_1)$$

故ニ 充分  $n$  が大ナルトキ、 $\nu(I_n) \leq \varepsilon \cdot (I_n \text{ノ長サ}) = \varepsilon \frac{1}{2^n}$ .

從ツテ

$$|\gamma(1) - \gamma(0)| \leq \varepsilon.$$

故ニ ( $\varepsilon \rightarrow 0$  トスレバ)  $\gamma(1) = \gamma(0)$ . (証明了)

$$\boxed{\int_a^b \gamma(t) dt}$$

独立変数  $t$  が實数、 $\gamma(t)$  が  $t$ ノ連

続函数 ナラバ、ソノ積分 (*Riemann* 積分) ハ、普通ノ

場合ト同様 =、 $t$ ノ區間ヲ細分シタ場合ノ和ノ極限トシテ  
定義サレル。

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \varphi(\tau_i) \Delta t_i,$$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \quad t_0 = a, \quad t_n = b, \quad t_{i-1} < \tau_i < t_i;$$

$$\Delta = \text{Max}(\Delta t_i). \quad \text{但シ } a < b \text{ トス。}$$

$a > b$  スハ  $a = b$  ノトキハ

$$\int_a^b = - \int_b^a$$

ニヨツテ定義スル。

積分ノ存在ハ、独立変数が閉區間  $[a, b]$ ニ屬シ、從ツ  
テ  $\varphi(t)$  が  $[a, b]$  デ一様ニ連続ナルコト、及ビ  $\varphi$  ノ屬ス  
ル空間  $\mathcal{L}$  が完全ニ距離空間ナルトキ = *Cauchy*ノ收斂  
條件が成立スルコトニヨツテ証明サレル。(以後常ニ  $\mathcal{L}$  ハ  
完全ト假定スル!)

$\varphi(t)$  が連続ナラバ容易ニ

$$\frac{d}{ds} \int_a^s \varphi(t) dt = \varphi(s)$$

之レカラ前ノ  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$  ナラバ  $\varphi(t) = \text{一定}$  トイフ定理

ニヨリ、 $\frac{d\varphi}{dt}$  が連続ナラバ、普通ノ場合ト同様ニ、

$$\int_a^b \frac{d\varphi(t)}{dt} dt = \varphi(b) - \varphi(a).$$

**重複積分** 独立変数が有限個ノ実変数ノ組合ハセヨ

リ成ル函数  $\varphi = \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n)$  ノ場合,  $\varphi(u)$  が連続ナラバソノ重複積分モ、全ク初等積分学ニ於ケルトキト同様ニ定義出来ル。又重複積分ヲ單一積分ノ繰返シトシテ考ヘルコト, 従ツテ又積分ノ順序ノ変更モ普通ノ場合ト全ク同様ニ出来ル。

例ハ

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{a'}^{b'} \varphi(u, v) du dv &= \int_a^b \left[ \int_{a'}^{b'} \varphi(u, v) dv \right] du \\ &= \int_{a'}^{b'} \left[ \int_a^b \varphi(u, v) du \right] dv. \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \text{ ツイテ }} \quad \varphi(u, v) \text{ が}$$

實変数  $(u, v)$  デ微分可能ナルトキ、更ニ  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$  が  $v$  デ連続微分可能ナラバ、

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)$$

証明ハ

$$\begin{aligned} \int_a^u \int_b^v \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) du dv &= \int_a^u \left[ \int_b^v \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) dv \right] du \\ &= \varphi(u, v) - \varphi(u, b) - \varphi(a, v) + \varphi(a, b) \\ &= \int_b^v \left[ \int_a^u \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) du \right] dv. \end{aligned}$$

故に

$$\frac{\partial}{\partial U} \left( \frac{\partial \varphi(U, V)}{\partial V} \right) = \left[ \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial U} \right) \right]_{\substack{U=U \\ V=V.}}$$

(証明了)

一般に  $\frac{\partial}{\partial u_k} \left( \frac{\partial}{\partial u_{k-1}} \left( \cdots \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right) \cdots \right) \right)$  が連続ナル時 = ハ

之レハソノ微分ノ順序ニ無関係トナル。從ツテ我々ハ之ヲ

簡單に

$$\frac{\partial^k \varphi}{\partial u_1 \partial u_2 \cdots \partial u_k}$$

ヲ表ハス。

### §3. 高階ノ微分法

前号 §1 = 於テ定義シタ  $\varphi = f(\varphi)$  ,  $\varphi_0$  = 於ケル微分商ハ,  $\varphi$  , 線状空間  $\mathcal{L}_1$  , ヲ  $\varphi$  , 線状空間  $\mathcal{L}_2$  へ, 線状寫像 デアル。即チ

$$f_{\varphi}(\varphi_0) = \left( \frac{d\varphi}{d\varphi} \right)_{\varphi_0} \in [\mathcal{L}_2(\mathcal{L}_1)].$$

此処デ  $\varphi_0$  ハばらめたニスギナイ。此ノばらめたニ  $\varphi_0$  テ活カシテ  $\varphi$  ト同ジ領域ヲ変化セシムルトキ、之レヲ元ト同ジ  $\varphi$  デ表ハシ、 $f_{\varphi}(\varphi) = \frac{d\varphi}{d\varphi}$  ヲバ  $\varphi = f(\varphi)$  ノ導函数トイフ。導函数ハ又  $\varphi$  ノ函数トナル。導函数ノトシ値ノ領域ハ  $[\mathcal{L}_2(\mathcal{L}_1)]$  デアル。

$[\mathcal{L}_2(\mathcal{L}_1)]$  ハ又線状空間ヲ作ル。(60号 39—40 頁参照) 従ッテ  $f_y(y)$  が更ニ  $y$  ノ函数トシテ、微分商が定義出来ル。即チ

$$f_{yy}(y) = \frac{d}{dy} f_y(y) \in [\mathcal{L}_2(\mathcal{L}_1)](\mathcal{L}_1).$$

$y$  ハばらめた—ニスギナイ。各一定ノ  $y$  ニツイテ  $f_{yy}(y)$  ハ  $(\mathcal{L}_1)$  カラ  $[\mathcal{L}_2(\mathcal{L}_1)]$  ヘノ線状寫像デアアル。以下同様ニシテ一般ノ高階ノ微分商ヲ定義スルコトが出来ル。

高階ノ微分 一般ニ微分商ハ元ノ函数値ノ領域ヨリ  $n$  高イ階段ノ線状空間ニ属スル。之ニ對シ 微分ハ元ノ函数値ト同ジ線状空間ニ属スルモノデアアル。即チ

$$(y_1 \in \mathcal{L}_1) \longrightarrow [dy = f_y(y) y_1 \in \mathcal{L}_2]$$

同様ニ二階ノ微分商ニ於テモ

$$(y_1 \in \mathcal{L}_1) \longrightarrow \{f_{yy}(y) \cdot y_1 \in [\mathcal{L}_2(\mathcal{L}_1)]\},$$

故ニ更ニ

$$(y_2 \in \mathcal{L}_1) \longrightarrow \{[f_{yy}(y) \cdot y_1] \cdot y_2 \in \mathcal{L}_2\}.$$

次ノコトハ微分ノ定義カラ容易ニ証明出来ル。

$$\frac{d}{dy} \{f_y(y) \cdot y_1\} = f_{yy}(y) \cdot y_1,$$

故ニ

$$\frac{d}{dy} \{f_y(y) \cdot y_1\} \cdot y_2 = [f_{yy}(y) \cdot y_1] \cdot y_2.$$



但し  $\varphi_1, \varphi_2$  は  $\varphi$  と独立な  $\mathcal{L}_1$  の要素 (任意) デアル。

$$\boxed{[f_{\varphi\varphi}(\varphi) \cdot \varphi_1] \cdot \varphi_2 = [f_{\varphi\varphi}(\varphi) \cdot \varphi_2] \cdot \varphi_1 = \text{就テ}}$$

普通、微分法 = 於ケル法則

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial Z}{\partial y} \right)$$

= 相當スルモノが

$$[f_{\varphi\varphi}(\varphi) \cdot \varphi_1] \cdot \varphi_2 = [f_{\varphi\varphi}(\varphi) \cdot \varphi_2] \cdot \varphi_1$$

デアル ( $\varphi_1, \varphi_2$  = ツイテ對稱)。但し  $f_{\varphi\varphi}(\varphi)$  が  $\varphi$  = ツイ  
テ連続デアルト假定スル。之ハ有限次元ノ場合 = 於イテハ、  
行列

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} & \frac{\partial y}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} & \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{pmatrix} = f_{\varphi\varphi}(\varphi) \quad [y = f(\varphi)]$$

が對稱ナルコトヲ意味スルモノデアル。

証明.  $y = f(\varphi)$  = 就テ

$$\varphi(u, v) = \varphi_0 + u\varphi_1 + v\varphi_2$$

( $u, v$ ) ハ實變數トスル。シカラバ

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) = \frac{d}{d\varphi} [f_{\varphi}(\varphi) \cdot \varphi_1] \varphi_2 = [f_{\varphi\varphi}(\varphi) \cdot \varphi_1] \cdot \varphi_2,$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right) = [f_{\varphi\varphi}(\varphi) \cdot \varphi_2] \varphi_1.$$

所が §2 の結果 = ヌリ

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right).$$

$$\text{故} = [f_{yz}(x) \cdot y_1] \cdot y_2 = [f_{zy}(x) \cdot y_2] y_1$$

—— (証明了) ——

次 =  $f(x, y)$  が  $(x, y) =$  ツキ微分可能デ  $f_{yz}(x, y)$   
が連続ナル時 = モ、同様 = シテ

$$[f_{yz}(x, y) dy] dx = [f_{zy}(x, y) dx] dy$$

が証明出来ル。又一般ノ高階ノ微分 = ツイテモ同様ノコトが  
成立スル。

---

ウカウカ シテ 井内 = 又紙上談話會ノ原稿ノ締切り = ナ  
ツテ シマツタ、平凡ナ事バカリデ面目ナイ。此ノ次ハ解析函  
數ヲ考察スルコト = シヨウ。